INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN LUCAS
TALLER DE ACTUALIZACIÓN ACADÉMICA (T.A.A)

Docente: ELKIN CASTRO GUTIERREZ-WILLMAN ORTEGA MENA	**Grado: DECIMO**	**Jornada: AM y PM**
Área o asignatura: MATEMATICAS	**Contenido Temático: RELACIONES TRIGONOMETRICAS**	
Fecha máxima de entrega: Del 11 al 22 de Enero de 2021		

Introducción: *Cordial saludo a los estudiantes de grado diez. Deseándoles lo mejor con esta frase de motivación*

La vida es una serie de colisiones con el futuro; no es una suma de lo que hemos sido, sino de lo que anhelamos ser- José Ortega y Gasset.

Objetivos: *-Crea una representación mental del concepto Angulo-Halla relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos*

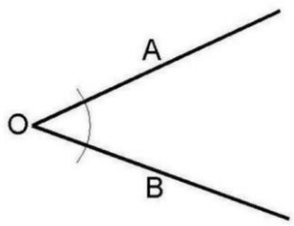
Exploración de conocimientos previos: *La trigonometría es una rama de las tantas ramas de matemáticas, se encarga de estudiar y analizar la relación entre los lados y los ángulos de los triángulos. Para esto recurre generalmente a las llamadas razones trigonométricas. El origen de la palabra trigonometría desciende del griego "trígonos" (triángulo) y "metros" (metria). ¿Qué es un Angulo? ¿Cuáles son las principales relaciones trigonométricas? ¿Cómo se hallan las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo? ¿Cómo se usa el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo?*

Explicación del tema:

Ángulo

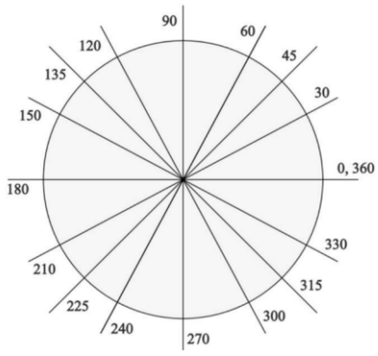
Un ángulo es el espacio comprendido entre dos rayos que tienen un origen común; el origen común es llamado **vértice (O)**, y a los **rayos (A y B)** se les llama **lados**.

En trigonometría el ángulo se puede definir como la amplitud de rotación o giro que describe una semi-recta (rayo) en torno de su origen tomado como vértice desde una posición inicial hasta una posición final. Si la rotación es en sentido levógiro (contrario a las agujas del reloj), se considera el ángulo positivo. Si la rotación es en sentido dextrógiro (igual que las agujas del reloj), el ángulo se considera negativo.



Medida de un ángulo

La medida de un ángulo puede expresarse en radianes (sistema circular), en grados sexagesimales (sistema sexagesimal), o en grados centesimales (sistema centesimal); siendo las dos primeras las más utilizadas.



En el **sistema sexagesimal** se considera a la circunferencia dividida en 360 partes iguales; y un ángulo de 1° sexagesimal es la medida de aquel que se genera cuando el giro, en el mismo sentido de las manecillas del reloj, del lado terminal es de 1/360 parte de una vuelta completa. Cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos. Los símbolos para estas unidades son:

Grado **°** ; minuto **'** ; segundo **"**

Conversión de radianes a grados y viceversa

La longitud de la circunferencia está dada por $\boldsymbol{L = 2\pi r}$, como 1 radian es igual a la longitud de un radio, entonces la circunferencia mide $\boldsymbol{2\pi}$ radianes que es un giro completo, y mide 360°. Basados en este análisis el factor de conversión de grados a radianes y viceversa es:

$$\frac{2\pi\, rad}{360°}\text{, o lo que es igual } \frac{\pi\, rad}{180°} = \frac{180°}{\pi\, rad}$$

Los cuales se utilizan de acuerdo con las necesidades

Ejemplo

1. Determina la medida en radianes que corresponde a un ángulo de 20°
   Como $\frac{\pi\, rad}{180°}$ y el ángulo es $20°$, entonces

$$\boldsymbol{\alpha\, rad = 20° \times \frac{\pi\, rad}{180°} = \frac{\cancel{20°} * \pi\, rad}{\cancel{180°}} = \frac{1\pi\, rad}{9}}$$

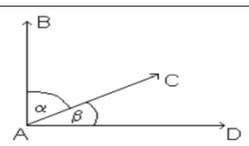
   Es decir $20° = \frac{1\pi\, rad}{9}$

2. Determina la medida en grados que corresponde a un ángulo de $\frac{4}{3}\pi\, rad$
   Como $\frac{180°}{\pi\, rad}$ y el ángulo es $\frac{4}{3}\pi\, rad$, entonces

$$\boldsymbol{\theta°} = \frac{4}{3}\pi\, rad \times \frac{\boldsymbol{180°}}{\boldsymbol{\pi}\, rad} = \frac{\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\cancel{\boldsymbol{\pi\, rad}} * \boldsymbol{180}}{\cancel{\boldsymbol{\pi\, rad}}} = \frac{\boldsymbol{4 * 180°}}{\boldsymbol{3}} = 240$$

   Es decir $\frac{4}{3}\pi\, rad = 240°$

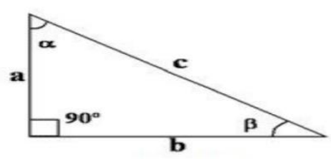
Más sobre ángulos

Ángulos complementarios	Es un tipo especial de ángulo adyacente cuya particularidad es que suman 90°. $\propto + \beta = 90°$ El <BAC es adyacente al <DAC y viceversa.	

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto o de 90° (sistema sexagesimal) o de $\frac{\pi}{2}$rad, (sistema circular).

Los lados de un triángulo rectángulo que forman el ángulo recto, se llaman **catetos** (lados **a** y **b**) y el tercer lado (lado **c**, el opuesto al ángulo recto) es la **hipotenusa**.



Todo triángulo rectángulo cumple con el **Teorema de Pitágoras,** el cual dice: ***"en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos"***, esto es:

$$(\boldsymbol{Hipotenusa})^2 = (\boldsymbol{cateto_1})^2 + (\boldsymbol{cateto_2})^2 \text{ , o según la figura anterior}$$

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Las razones trigonométricas son las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Habiendo dicho que los lados que forman el ángulo recto son llamados catetos, resta por decir que de acuerdo con el ángulo para el cual vamos a definir las razones trigonométricas, los catetos pueden ser llamados **cateto adyacente** si es el lado que está junto al ángulo en cuestión, y **cateto opuesto** si es el lado que se encuentra al frente de dicho ángulo.

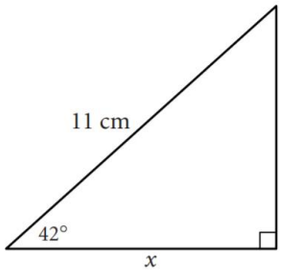
Por ejemplo, considerando el ángulo $\boldsymbol{\beta}$ de la figura 6 el cateto opuesto es el lado **a** y el cateto adyacente es el lado **b**.

En la siguiente tabla podemos resumir tres de las razones trigonométricas considerando el ángulo $\boldsymbol{\beta}$ de la figura anterior.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN LUCAS
TALLER DE ACTUALIZACIÓN ACADÉMICA (T.A.A)

NOMBRE	ESCRITURA	CÁLCULO	FÓRMULA según figura anterior
Seno de beta	$\text{sen}\,\beta$	$\text{sen}\,\beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$	$\text{sen}\,\beta = \dfrac{a}{c}$
Coseno de beta	$\cos\beta$	$\cos\beta = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$	$\cos\beta = \dfrac{b}{c}$
Tangente de beta	$\tan\beta$	$\tan\beta = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$	$\tan\beta = \dfrac{a}{b}$

EJEMPLO Encuentra el valor de x.



▸ ***Solución*** Necesitas encontrar la longitud del lado adyacente al ángulo de 42°. Se te da la longitud de la hipotenusa. La razón trigonométrica que relaciona el lado adyacente con la hipotenusa es la razón coseno.

$$\cos 42° = \frac{x}{11}$$

$$11(\cos 42°) = x \quad \text{Multiplica ambos lados por 11.}$$

$$8.17 \approx x \quad \text{Usa tu calculadora para encontrar } \cos 42° \text{ y multiplica el resultado por 11.}$$

El valor de x es aproximadamente 8.2 cm.

Para hallar el lado faltante puedes usar seno o utilizar el teorema de Pitágoras, para hallar el ángulo faltante puedes restar 90 – 42, ya que los 3 ángulos deben sumar 180 grados.

Para complementar el aprendizaje de esta guía mira el libro de Santillana grado decimo las páginas 32 y 33 en donde

encontrarás ejemplos del cálculo de relaciones trigonométricas.

<u>Actividades de Aprendizaje:</u>

En los ejemplos 1,2 y3 de las páginas 32 y 33 del libro de Santillana se hallan relaciones trigonométricas, para poner en prueba lo aprendido te proponemos lo siguiente:

1)Dibujar un triángulo rectángulo en una hoja cuadriculada que tenga como medidas de los catetos 6 y 8 cm y la hipotenusa mida 15 cm, luego hallaras las razones trigonométricas(seno, coseno, tangente) de este triángulo.

2) Dibujar un triángulo rectángulo en una hoja cuadriculada con las medidas que tu consideres más o menos como media hoja de tamaño y halla sus relaciones trigonométricas.

Actividad complementaria: Para profundizar más puedes leer el libro guía páginas 28-30.

<u>Evaluación:</u> **(Autoevaluación)** *Responde las preguntas:*
Responde las preguntas: 1¿Qué fue lo que más te causó dificultad al resolver las tareas de este taller y del libro? 2 Con tus palabras escribe qué aprendiste.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN LUCAS
TALLER DE ACTUALIZACIÓN ACADÉMICA (T.A.A)

Docente: ELKIN CASTRO GUTIERREZ-WILLMAN ORTEGA MENA	**Grado: DECIMO**	**Jornada: AM y PM**
Área o asignatura: MATEMATICAS	**Contenido Temático: APLICACIÓN RELACIONES TRIGONOMETRICAS**	
Fecha máxima de entrega: Del 11 al 22 de Enero de 2021		

Introducción: *Cordial saludo a los estudiantes de grado diez. Deseándoles lo mejor con esta frase de motivación*

Tus acciones positivas combinadas con pensamientos positivos resultan en éxito (Winston Churchill).

Objetivos: *Utiliza las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos, para resolver problemas- Identifica las variables en un problema- Reconoce la aplicabilidad de la trigonometría.*

Exploración de conocimientos previos: *Debes repasar los conceptos de ángulos, teorema de Pitágoras, relaciones trigonométricas. Al solucionar triángulos rectángulos muchas veces pueden hacerse de diversas formas, por ejemplo, solo usando trigonometría o combinarlo con el uso de teorema de Pitágoras.*

Explicación del tema:

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo rectángulo, consiste en encontrar el valor de los elementos (lados o ángulos) que no se conocen. Para resolver el triángulo rectángulo debemos conocer además del ángulo recto otros dos elementos, de los cuales al menos uno de ellos debe ser un lado, y para poder hallar un elemento desconocido escogemos de las definiciones de las razones trigonométricas, una que contenga dicho elemento y otros dos conocidos, o también podemos emplear el Teorema de Pitágoras.

1°. Comprender el problema

En esta etapa debes leer con mucha atención el problema hasta que seas capaz de entender lo que dice y lo que se pregunta, además puedes escribir los datos, y en caso de ser necesario pasar los datos en las mismas unidades de medida.

2°. Preparar el plan

Aquí puedes hacer un dibujo que interprete y represente los datos del problema, también puedes comparar el problema con otros similares para que te puedas guiar, y seleccionar las operaciones y las ecuaciones a utilizar.

3°. Ejecutar el plan

Implementa la o las estrategias que escogiste hasta solucionar el problema o hasta que la misma acción te sugiera tomar un nuevo rumbo.

4°. Analizar la solución obtenida

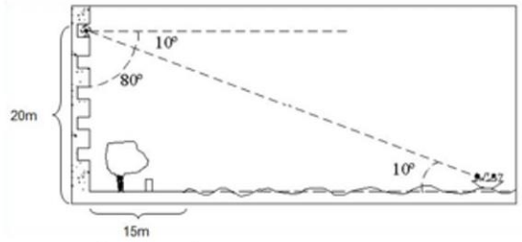
Comprueba que la solución es lógica y que corresponde con lo que pide el problema.

EJEMPLO:

Resuelve el siguiente problema aplicando los pasos sugeridos en el apartado anterior:
"Marta, que vive en un edificio a la orilla de la playa, observa un hidropedal averiado bajo un ángulo de depresión de 10°. Ella estima que la altura de su apartamento es de 20 m y que la distancia del portal a las olas es de 15 m. ¿cuánto deberán desplazarse los ocupantes del hidropedal hasta alcanzar la playa?"

Solución

Luego de haber leído con atención el problema, comprendí que me piden calcular la distancia que hay entre el bote de pedal (hidropedal) y la orilla de la playa.
A continuación, logré realizar el siguiente dibujo, al cual le coloque los datos que me proporcionó el problema.



Al observar que se forma un triángulo rectángulo entre la línea de visión de Marta con el bote, el mar, la playa, el portal del edificio y la altura del apartamento de Marta, sé que puedo calcular la distancia desde el hidropedal hasta el edificio utilizando la razón trigonométrica tangente del ángulo de 10° que se muestra en el dibujo, luego restándole los 15m que hay del edificio a la playa, me queda la distancia entre el hidropedal y la playa. Entonces…

$$\tan 10° = \frac{20m}{x}$$

Despejando x queda:

$$x = \frac{20m}{\tan 10°}$$

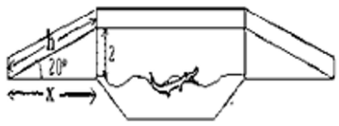
Usando la calculadora

$$\boldsymbol{x = 113.42m}$$

Y, la distancia que deben nadar los pasajeros del hidropedal es $\boldsymbol{113.42m - 15m = 98.42m}$.

Veamos otro ejemplo

Se desea construir un puente sobre un río, que mide 10 m de ancho, de manera que quede a una altura de 2 m sobre el agua y que las rampas de acceso tengan una inclinación de 20°. ¿Cuál debe ser la longitud de la baranda?, ¿a qué distancia del cauce se situará el comienzo de la rampa?
Solución



Para hallar la longitud de la baranda (h), podemos emplear la función seno del ángulo de 20°.

$$\text{sen } 20° = \frac{2m}{h}$$

Despejando h nos queda:

$$h = \frac{2m}{\text{sen } 20°}$$

Usando la calculadora

$$\boldsymbol{h = 5.8476m}$$

Y para hallar la distancia del cauce hasta el comienzo de la rampa (x) empleamos la función tangente de 20°.

$$\tan 20° = \frac{2m}{x}$$

Despejando x queda:

$$x = \frac{2m}{\tan 20°}$$

Usando la calculadora

$$\boldsymbol{x = 5.4949m}$$

Leer el libro de Santillana página 43, en donde hay 3 ejemplo más resueltos de este contenido

<u>Actividades de Aprendizaje:</u>

Resolver los problemas del libro de Santillana página 44 relacionados:

Problemas 5, 6 7, 8,9 y 10.

Actividad complementaria: Busca en el libro de Santillana donde se hable sobre la importancia de la trigonometría, ¿en cuales ciencias se utiliza?

<u>Evaluación:</u> **(Autoevaluación)** *Responde las preguntas:*

1. ¿Qué fue lo que más te causó dificultad al resolver las tareas de este taller y del libro?

2. ¿Por qué crees que te causó dificultad?

3. ¿Qué fue lo que te pareció más fácil en el taller y el libro?

INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN LUCAS
TALLER DE ACTUALIZACIÓN ACADÉMICA (T.A.A)

Docente: ELKIN CASTRO GUTIERREZ-WILLMAN ORTEGA MENA	**Grado: DECIMO**	**Jornada: AM y PM**
Área o asignatura: MATEMATICAS	**Contenido Temático:** LEY DEL SENO	
Fecha máxima de entrega: Del 11 al 22 de Enero de 2021.		

Introducción: *Cordial saludo a los estudiantes de grado diez. Deseándoles lo mejor con esta frase de motivación. La verdadera educación consiste en obtener lo mejor de uno mismo (Mahatma Gandhi)***.**

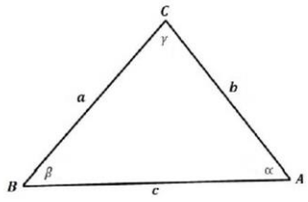
Objetivos: *Utiliza la ley del seno para hallar datos faltantes en un triángulo. - Identifica las variables en un problema- Reconoce la aplicabilidad de la trigonometría.*

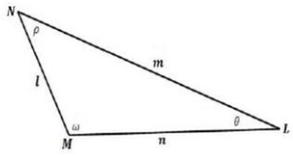
Exploración de conocimientos previos: *Debes repasar los conceptos de ángulos, relaciones trigonométricas. Al solucionar triángulos oblicuángulos muchas veces pueden hacerse de diversas formas, por ejemplo, para hallar ángulos faltantes, se puede usar solo trigonometría o se puede usar la propiedad del triángulo de que todos sus ángulos internos suman 90 grados.*

Explicación del tema:

SOLUCION DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Los triángulos oblicuángulos son aquellos que no tienen un ángulo recto, es decir que en ellos no aplica ni el Teorema de Pitágoras, ni las Razones trigonométricas.

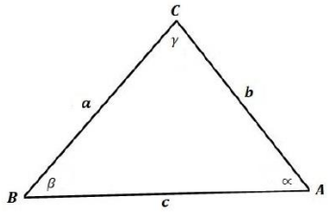




Para resolver este tipo de triángulos se necesitan otros métodos, entre ellos: el Teorema del Seno y el Teorema del Coseno

LEY O TEOREMA DEL SENO

Este teorema establece una proporción matemática entre las longitudes de cada uno los lados de un triángulo y los senos de sus correspondientes ángulos opuestos.
Es decir que para el siguiente triángulo podemos establecer:



$$\frac{a}{\sin \propto} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

o

$$\frac{\sin \propto}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

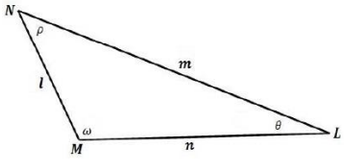
Por lo general este teorema lo podemos aplicar cuando de un triángulo conocemos

- Dos ángulos y cualquier lado, o
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

EJEMPLO

Analiza la solución de los siguientes ejercicios

1)



Datos:

$$m = 3cm$$
$$\rho = 42°$$
$$\theta = 28°$$

Por lo tanto

$$\omega = 180° - 42° - 28°$$
$$\omega = 110°$$

Solución
Faltaría entonces calcular la longitud de los lados n y l
Aplicando el teorema del seno

$$\frac{m}{\sin\omega} = \frac{l}{\sin\theta}$$

$$\frac{m\sin\theta}{\sin\omega} = l$$

$$\frac{37cm\sin 28°}{\sin 110°} = l$$

$$\mathbf{18.48cm = l}$$

De forma similar calculamos el valor de n

$$\frac{m}{\sin\omega} = \frac{n}{\sin\rho}$$

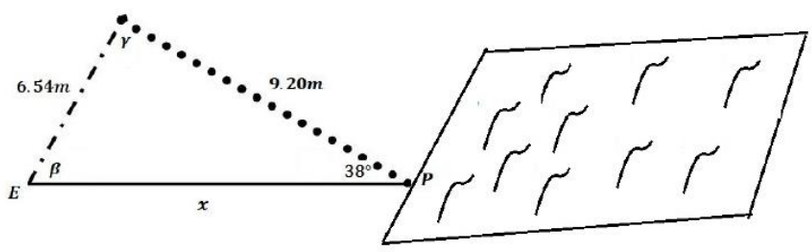
$$\frac{m\sin\rho}{\sin\omega} = n$$

$$\frac{37cm\sin 42°}{\sin 110°} = n$$

$$\mathbf{26.34cm = n}$$

2) Se desea instalar un rodadero para una piscina; para ello se cuenta con un deslizadero prefabricado que tiene una longitud de $9.20m$ y está diseñado para instalarse con un ángulo de elevación de $38°$ respecto al piso. También se cuenta con la escalera, la cual tiene una longitud de $6.54m$.
   a. ¿Cuál deberá ser el ángulo de elevación de la escalera respecto al piso?
   b. ¿Qué distancia sobre el piso separa la escalera del deslizadero?

Solución:
Luego de comprender el problema, lo primero que debemos hacer es un dibujo que represente el problema



Ahora podemos aplicar el teorema del seno para calcular el ángulo $\boldsymbol{\beta}$

$$\frac{\sin\beta}{9.20m} = \frac{\sin 38°}{6.54m}$$

$$\sin\beta = \frac{9.20\cancel{m} \times \sin 38°}{6.54\cancel{m}}$$

$$\sin\beta = 0.8660$$

$$\beta = acr\sin 0.8660$$

$$\boldsymbol{\beta = 60°}$$

Como $38° + 60° + \gamma = 180°$ entonces $\gamma = 82°$ y por tanto

$$\frac{x}{\sin 82°} = \frac{6.54m}{\sin 38°}$$

$$x = \frac{\sin 82° \times 6.54m}{\sin 38°}$$

$$\boldsymbol{x = 10.52m}$$

Entonces el ángulo de elevación de la escalera es $\boldsymbol{\beta = 60°}$ y la separación entre la escalera y el deslizadero es $\boldsymbol{x = 10.52m}$

Leer el libro de Santillana página 78 a 82, en donde se presenta esta explicación, desde otra óptica, y más ejemplos resueltos de este contenido.

<u>Actividades de Aprendizaje:</u>

Resolver los problemas del libro de Santillana página 83 relacionados:

Problemas 7,8,9,10,11,12,13,14,15.

Actividad complementaria: Lee sobre la ley del coseno libro Santillana 85 y 86.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN LUCAS
TALLER DE ACTUALIZACIÓN ACADÉMICA (T.A.A)

<u>Evaluación:</u> **(Autoevaluación)** *Responde las preguntas:*

1. Debes explicar con tus palabras cómo resolviste el ejercicio del primer caso (que fue lo que hiciste)

2. Con tus palabras escribe qué aprendiste.

3. ¿Qué crees que puedes hacer en el próximo taller para que entiendas mejor lo que se te propone?

INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN LUCAS
TALLER DE ACTUALIZACIÓN ACADÉMICA (T.A.A)

Docente: ELKIN CASTRO GUTIERREZ-WILLMAN ORTEGA MENA	**Grado: DECIMO**	**Jornada: AM y PM**
Área o asignatura: MATEMATICAS	**Contenido Temático: GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS**	
Fecha máxima de entrega: Del 11 al 22 de Enero de 2021.		

Introducción: *Cordial saludo a los estudiantes de grado diez. Deseándoles lo mejor con esta frase de motivación. Cuanto más grande es la dificultad, más gloria hay en superarla (Epícuro)***.**

Objetivos: Usar y relacionar diferentes representaciones para modelar situaciones de variación. - *Identifica las periodicidades en las gráficas de la función seno y coseno.*

Exploración de conocimientos previos: *Debes repasar los conceptos de tabla de valores, función y plano cartesiano. Las gráficas de las funciones trigonométricas aparecen en diversas ciencias tales como física, ingeniería, y hasta en la medicina.*

Explicación del tema: *EJEMPLO1: Graficar la función seno.*

Solución: Primer paso: Hacemos una tabla de valores, usando un intervalo de 30 grados.

X(angulo grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
angulo en radianes													
Y = senX													

Para colocar los ángulos en radianes podemos hacer la conversión de grados a radianes, o podemos ver su equivalencia en la página 52 del libro de Santillana en la tabla de valores x que está a la izquierda (solo los valores de x), quedando así:

X(angulo grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
angulo en radianes	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
Y = senX													

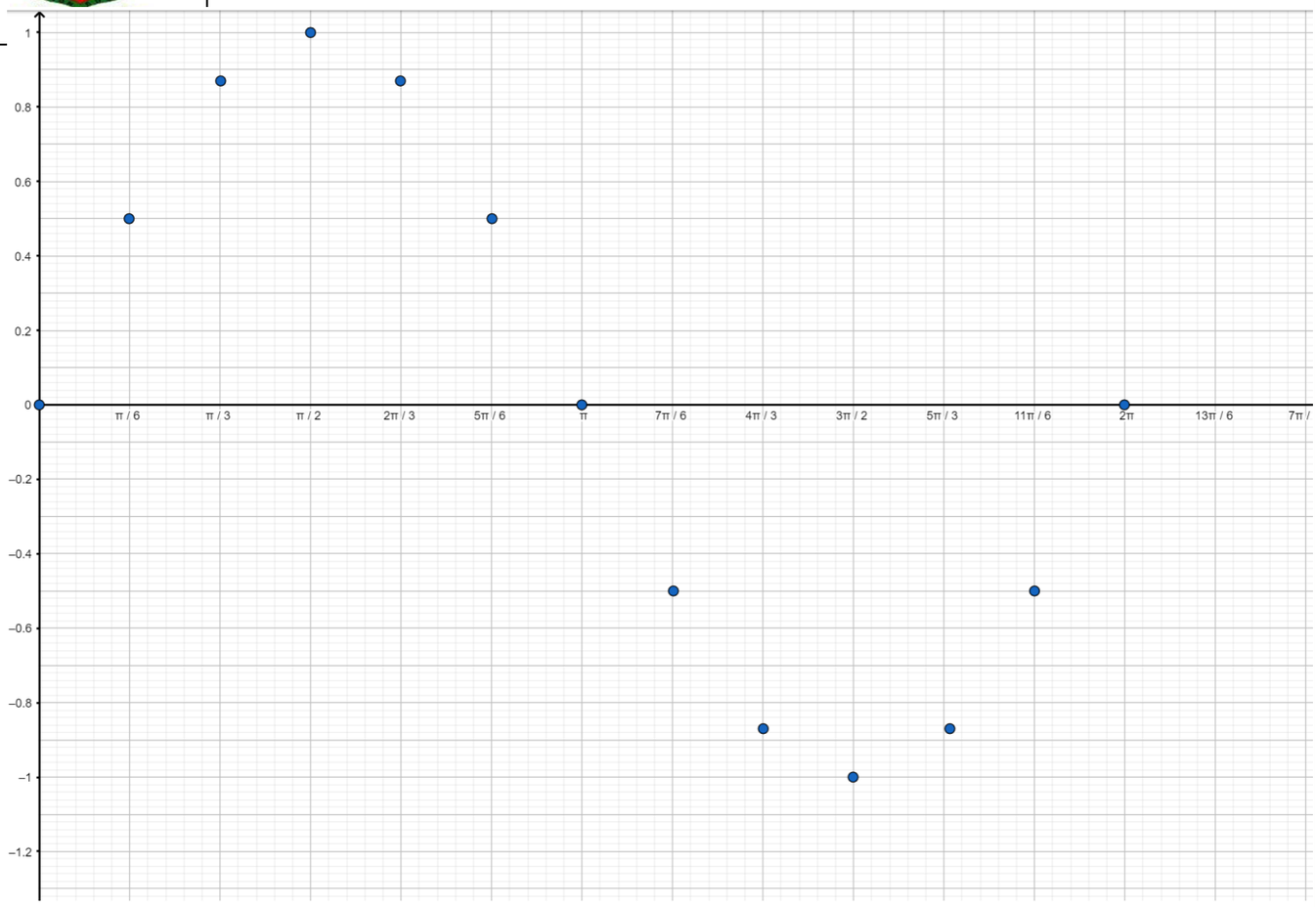
Segundo paso:

Utilizamos una calculadora para hallar los valores del seno de x, por ejemplo, para un Angulo de 210° se tiene senx = -0.5. Al llenar la tabla con los valores hallados se tiene:

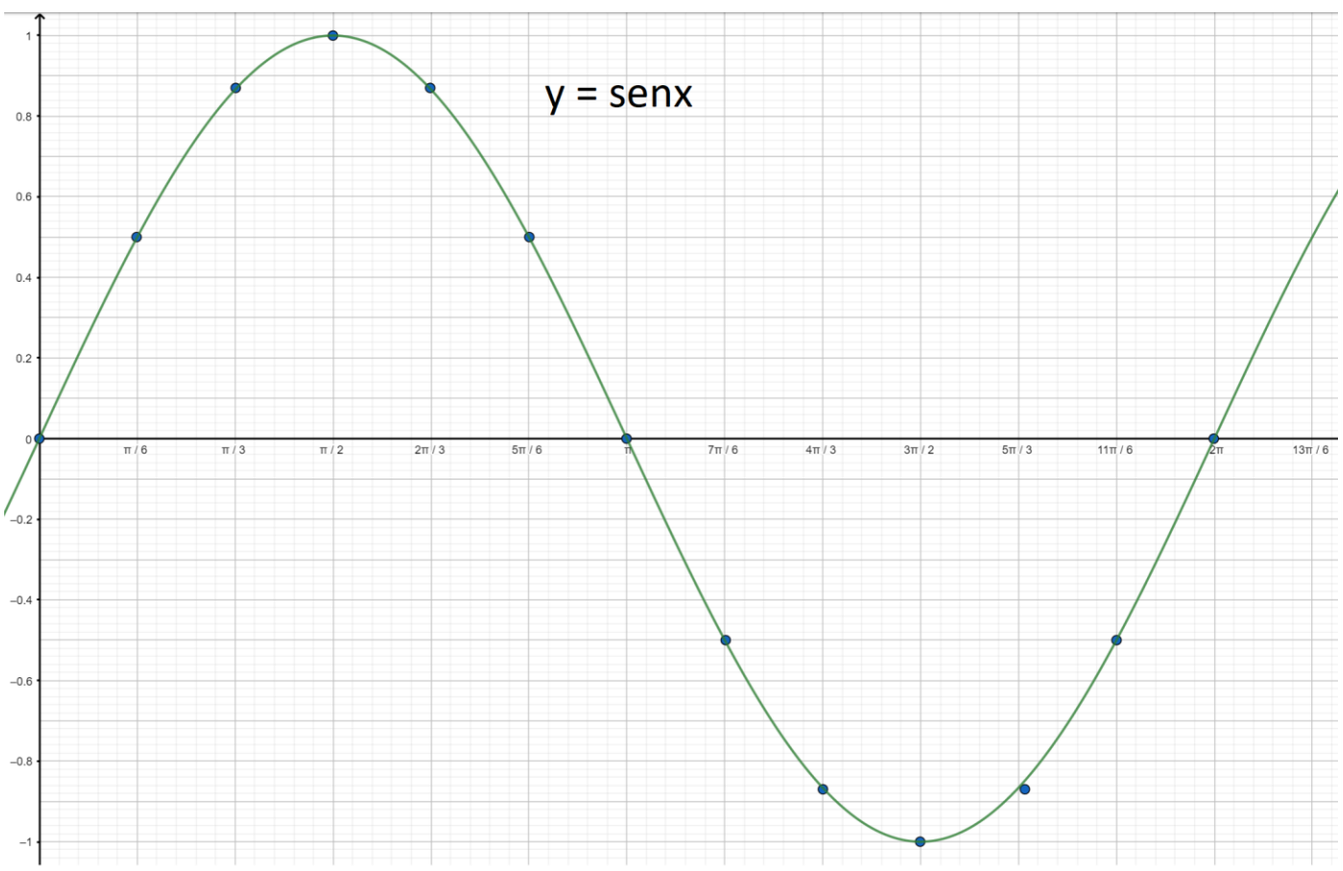
X(angulo grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
angulo en radianes	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$11\pi/6$	2π
Y = senX	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,9	-1	-0,87	-0,5	-0

Tercer paso:

Graficamos en el plano cartesiano, el eje x son los ángulos y el eje y son los valores del seno. Si graficamos los puntos de 0 a 360° en grados o de 0 a 2π en radianes se tiene:



La grafica final al unir todos los puntos queda así:



Actividades de Aprendizaje:

Dibuja las gráficas de la función seno, coseno y tangente con su respectiva tabla de valores usando hoja milimetrada o usando hoja cuadriculada grande, también puedes usar hojas de cuaderno unidas, u hojas de cuaderno dobles. Tener en cuenta que las medidas en los ejes “x” y “y” sean uniformes.

Para realizar las gráficas puedes usar el método explicado en esta guía, o puedes usar el método mostrado en el libro de Santillana páginas 51 a 55, teniendo en cuenta que la gráfica para que se vea bien debe tener un tamaño mayor al de una hoja.

Actividad complementaria: Lee sobre análisis e interpretación de graficas libro Santillana 61 y 62.

Evaluación: **(Autoevaluación)** *Responde las preguntas:*

1. ¿Cuál de las gráficas fue más difícil de realizar y por qué?
2. Con tus palabras escribe qué aprendiste.
3. ¿Considera que el taller te sirvió para mejorar tus conocimientos en matemáticas?